1 - INTERPOLATION

J-P. Croisille

Université Paul Verlaine-Metz

Semestre S7, master de mathématiques M1, année 2008/2009

1- INTRODUCTION

Théorie de l'interpolation: approximation de $f(x)$ par une fonction $\tilde{f}(x)$ réalisant un certain nombre de conditions.

- A partir de **données** $(x_i, f(x_i))$, qui sont par exemple des mesures, reconstruire la fonction $f(x)$ "au mieux". But : prédire la fonction $f(x)$ pour les valeurs x où on ne dispose pas de mesures.
- Interpolation polynômiale globale: interpolée de Lagrange. TOUTES les mesures infuencent la fonction interpolée $\tilde{f}(x)$ en tout x.
- Interpolation polynômiale par morceaux: interpolé de type spline. La fonction $\tilde{f}(x)$ est influencée au point x seulement par les mesures $(x_i, f(x_i))$ avec x_i proche de x.

Plus difficile: interpolation des surfaces. Chercher une fonction interpolante $\tilde{f}(x, y)$ qui passe par des points mesurés $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$.

Théorie de l'approximation: Approcher une fonction d'un espace *abstrait* par une fonction d'un espace *concret*.
Exemple: approximation de $L^2[0,1]$ par les fonctions affines par morceaux sur une grille fixée.
Théorie abstraite de l'approximation: Partie de l'analyse fonctionnelle.
Exemple: Théorème de projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert.
Théorie concrète de l'approximation: Construire un algorithme de calcul de la meilleure approximation quand elle existe.
Exemple: Assemblage et résolution numérique du système linéaire correspondant à une approximation de type moindres carrés.

Références:

- M-J-D. Powell: Approximation theory and methods, *Cambridge Univ. Press, (1981)*
- R. Kress: Numerical Analysis, *Springer, (1997)*
- G. Hämmerlin, K-H. Hoffmann: *Numerical Mathematics, (1988)*
- P.J. Davis: Interpolation and Approximation, *Dover (1975)*
- J. Barranger: Introduction à l'analyse numérique, *Hermann (1997)*
- M. Schatzman: Analyse numérique: une approche mathématique *Dunod (2001)*

2- INTERPOLATION DE LAGRANGE: DEFINITION

But: approximation de f, continue sur $[a, b]$ par un polynôme $p \in \mathcal{P}_n[a, b]$,

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \, x^i \ , \ a \leq x \leq b \tag{1}$$

Collocation en $n + 1$ points distincts $a \leq x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n \leq b$:

$$f(x_i) = p(x_i) \tag{2}$$

Théorème A

Il existe un unique polynôme $p \in \mathcal{P}_n[a, b]$ vérifiant (2), qui est

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \, l_k(x) \tag{3}$$

où $l_k(x)$ est le polynôme élémentaire de Lagrange

$$l_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \tag{4}$$

Démonstration:
Il est évident que le polynôme $p(x)$ convient. Si un second polynôme $q(x)$ convient, alors $p - q$ est de degré n et possède $n+1$ racines, distinctes, donc il est nul. ■

Théorème B

Si $f \in C^{(n+1)}[a,b]$ et si p est son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points x_j, alors l'erreur $e(x) = f(x) - p(x)$ est telle que pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi(x) \in [a,b]$ tel que

$$e(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)\, f^{(n+1)}(\xi) \tag{5}$$

Démonstration:
En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires par récurrence, on montre que si la fonction $g \in C^{(n+1)}[a, b]$ s'annule en $(n+2)$ points distincts de $[a, b]$, alors sa dérivée d'ordre $(n+1)$ possède au moins, un zéro dans $[a, b]$.

Premier cas:
Si le point x coïncide avec l'un des x_i, alors $e(x_i) = 0$ et

$$0 = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x_i - x_j) \, f^{(n+1)}(\xi) = e(x_i) \tag{6}$$

d'où l'identité entre les deux termes.

Deuxième cas:
Si $x \neq x_i$, on considère la fonction

$$g(t) = f(t) - p(t) - e(x) \prod_{i=0}^{n} \left(\frac{t - x_i}{x - x_i} \right) \; , \; a \leq t \leq b \tag{7}$$

$$g \in C^{(n+1)}[a, b] \; , \; g(x) = 0 \quad \text{et} \quad g(x_i) = 0 \; , \; i = 0 \; , \; \ldots n \tag{8}$$

donc il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $g^{(n+1)}(\xi) = 0$. On a

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - e(x) \prod_{i=0}^{n} \frac{1}{(x - x_i)} (n+1)\,! \tag{9}$$

et

$$g^{(n+1)}(\xi) = 0 \Rightarrow e(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\, f^{(n+1)}(\xi) \tag{10}$$

$\blacksquare$

3- EXEMPLE DE RUNGE ET POINTS DE TCHEBYCHEFF

Exemple de Runge:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}\,,\ -5 \leq x \leq 5 \tag{11}$$

On examine l'erreur au voisinage de -5 et 5 aux points $x_{n-1/2} = 5 - \frac{5}{n}$, avec $x_i = -5 + 10\,\frac{i}{n}\,,\ i = 0, \dots n$. On observe que

$$\lim_{n \to +\infty} \|f(x_{n-1/2}) - \tilde{f}_n(x_{n-1/2})\|_\infty = +\infty \tag{12}$$

n	$f(x_{n-1/2})$	$p(x_{n-1/2})$	$e(x_{n-1/2})$
2	0.138	0.760	-0.621
10	0.047059	1.579	-1.532
20	0.042440	-39.953	39.995

Table: *Explosion de l'erreur entre fonction de Runge et son interpolé de Lagrange quand* $n \to +\infty$.

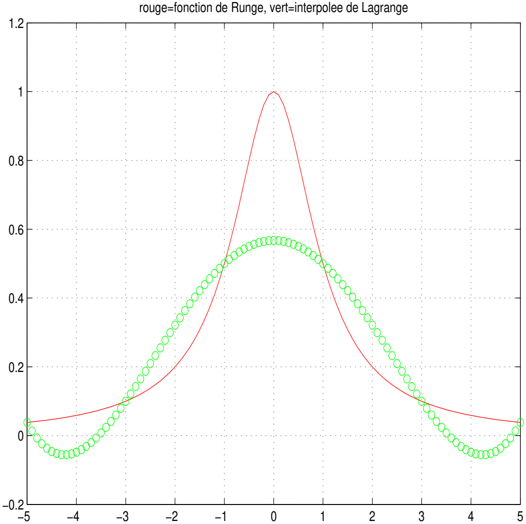
Explication: c'est le terme $\text{prod}(x_{n-1/2}) = \prod_{i=0}^{n}(x_{n-1/2} - x_i)$ dans l'erreur $e(x_{n-1/2})$ qui est responsable de l'explosion de l'erreur. Ce n'est pas $f^{(n+1)}(\xi)$. La quantité $|e(x) / f^{(n+1)}(\xi)|$ reste à peu près constante si on observe l'erreur aux points $x = \frac{x_i + x_{i-2}}{2}$, $i = 0, 1, \ldots 20$. Un remède est le suivant : il faut choisir les points d'interpolation très concentrés aux extrêmités de l'intervalle.

Evaluation de

$$\text{prod}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \qquad (13)$$

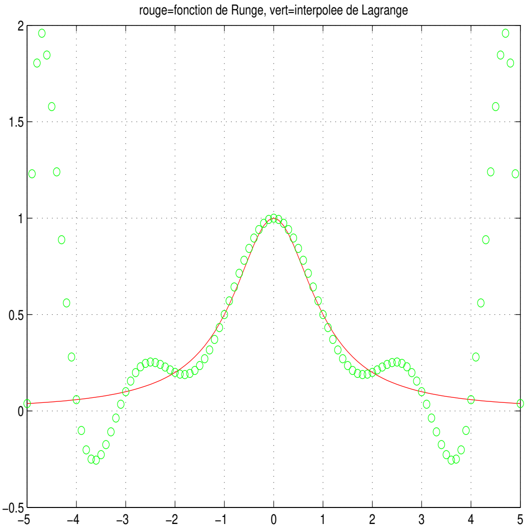
x	$f(x)$	$p(x)$	$e(x)$	$\text{prod}(x)$
0.25	0.941	0.942	-0.001314	2.05 (6)
1.75	0.246	0.238	0.0077	-6.56 (6)
4.75	0.0424	-39.952	39.994	-7.27 (10)

Table: *Comportement de* $\text{prod}(x)$



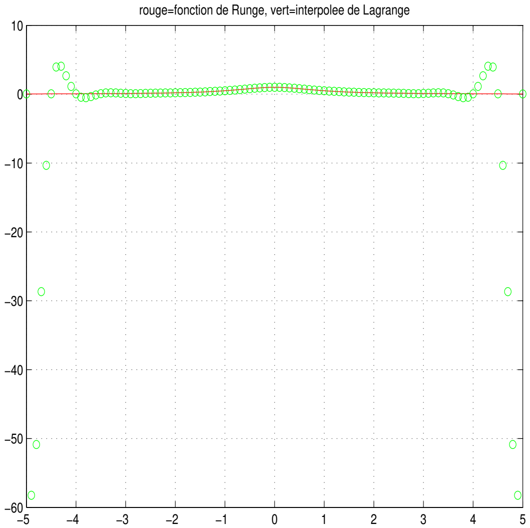
Données de Lagrange:

```
x=[-5:2:5];
f=Runge(x);
```



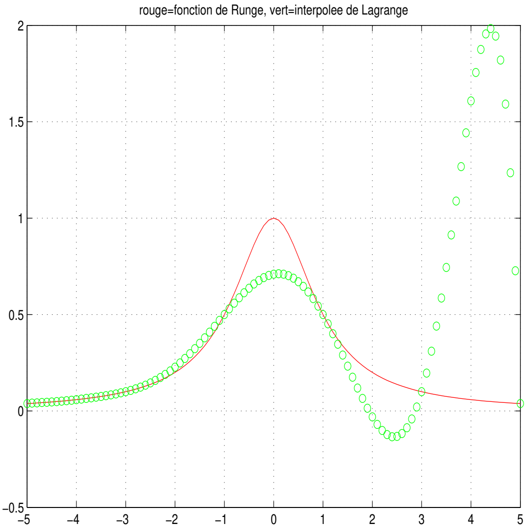
Données de Lagrange:

```
x=[-5:1:5];
f=Runge(x);
```



Données de Lagrange:

```
x=[-5:0.5:5];
f=Runge(x);
```



Données de Lagrange:

```
x=[-5 -4.5 -4 -3.5 -3 -1 1 3 5];
f=Runge(x);
```

Points de Tchebycheff: Une façon d'améliorer la qualité du résultat est de choisir les points d'interpolation de Tchebycheff. Les polynômes de Tchebycheff sont définis par

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\,\theta) \tag{14}$$

c'est à dire

$$T_n(x) = \cos(n\ \mathrm{Arccos}\,x) \quad , \quad -1 \leq x \leq 1 \tag{15}$$

Le polynôme de Tchebycheff $T_n(x)$ s'obtient en développant $\cos(n\,\theta)$ en puissances de $\cos\,\theta$ et en remplaçant $\cos\,\theta$ par x. La relation trigonométrique

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos\,\theta\ \cos(n\,\theta) \tag{16}$$

donne sur $T_n(x)$ la relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad , \quad -1 \leq x \leq 1 \tag{17}$$

L'intérêt est le suivant : le maximum de $T_n(x) = \cos(n\,\theta)$, $x = \cos\theta$, est 1. Donc si on choisit les points x_i tel que

$$\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = \text{ multiple de } T_{n+1}(x), \tag{18}$$

alors les x_i sont nécessairement les racines de $T_{n+1}(x)$.
On en déduit que

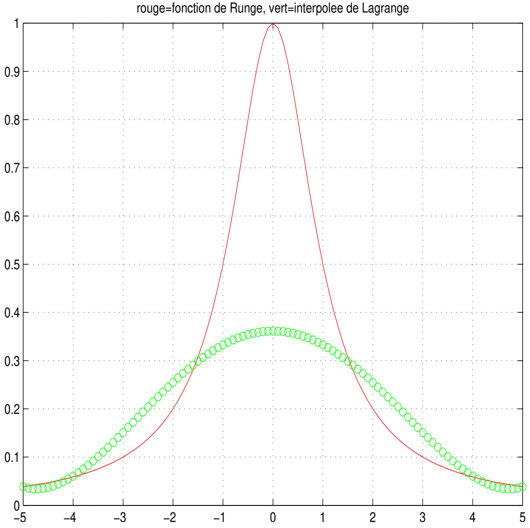
$$x_i = \cos\left(\frac{(2(n-i)+1)\pi}{2(n+1)}\right)\ ;\ i = 0, 1, \ldots n \tag{19}$$

L'adaptation à un intervalle quelconque se fait par

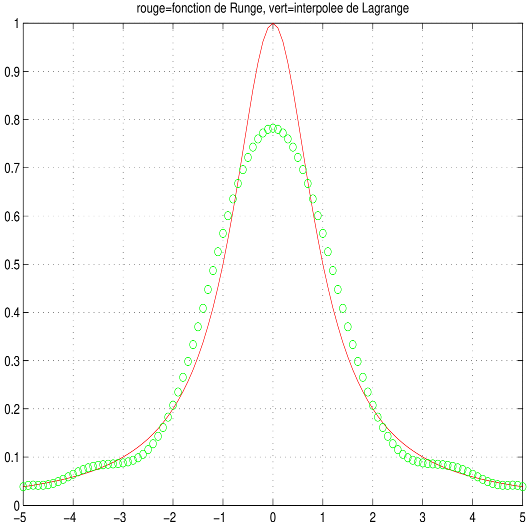
$$x_i = \lambda + \mu\,\cos\left(\frac{(2(n-i)+1)\pi}{2(n+1)}\right)\ ,\ i = 0, 1 \ldots n \tag{20}$$

avec λ et μ choisis tel que

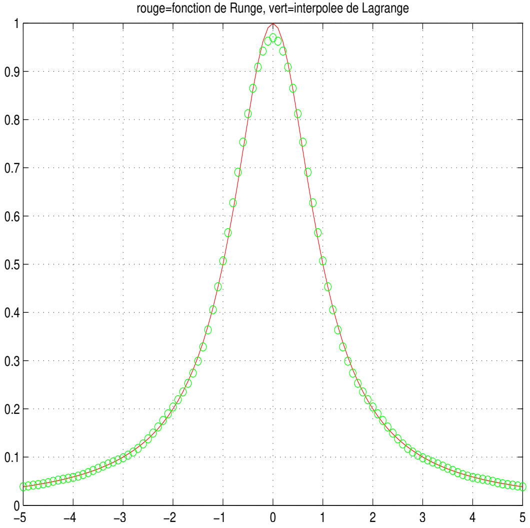
$$\lambda = \frac{1}{2}(a+b)\ ;\ \mu = \frac{1}{2}(b-a) \tag{21}$$



Données de Lagrange: Points de Tchebycheff avec $n = 4$



Données de Lagrange: Points de Tchebycheff avec $n = 10$



Données de Lagrange: Points de Tchebycheff avec $n = 20$

4- ALGORITHME DE NEWTON, DIFFERENCES DIVISEES

Le calcul effectif de $p(x)$, interpolant les données $(x_i\,;\,f_i)$, $0 \leq i \leq n$, par la formule

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \, l_k(x) \tag{22}$$

n'est pas *a priori* très bon.
Notion de complexité arithmétique: On évalue en fonction du nombre de points n du nombre d'opérations nécessaires pour réaliser le calcul. Si x est fixé,

- Calcul de $l_k(x)$: $O(n)$. En tout pour $k = 1, .., n$: $O(n^2)$.
- Assemblage de $p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \, l_k(x)$: $O(n)$.

En tout $O(n^2)$ opérations.

Définition (Différences divisées de Newton)

Le coefficient de x^n *dans le polynôme de Lagrange* $p(x)$ *est noté*

$$f[x_0\,,\,x_1\,,\ldots x_n] \tag{23}$$

et s'appelle la **différence divisée** *d'ordre* n *des données* $(x_i\,,\,f_i)_{0\leq i\leq n}$. *On a*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k\, l_k(x) \tag{24}$$

donc

$$f[x_0,\ldots x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x_k - x_j)} \tag{25}$$

Théorème C

Si $f \in C^{(n)}[a,b]$ *et* x_i , $0 \leq i \leq n$ *sont* $n+1$ *points distincts de* $[a,b]$*, alors il existe* ξ *dans le plus petit intervalle contenant tous les points* x_i , $0 \leq i \leq n$ *tel que*

$$f\,[x_0\,,\,x_1\ldots x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \tag{26}$$

Démonstration:

Soit $e(x) = f(x) - p(x) \in C^{(n)}[a,b]$. On a $e(x_i) = 0\,,\, i = 0\ldots n$. Donc il existe $\xi \in I$ tel que $e^{(n)}(\xi) = 0$, c'est à dire $f^{(n)}(\xi) = p^{(n)}(\xi)$. Ceci équivaut encore, puisque $n!\; f[x_0,\ldots x_n] = p^{(n)}(\xi)$ à

$$f[x_0,\ldots x_n] = \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(\xi) \tag{27}$$

$\blacksquare$

Principe du calcul effectif de $p(x)$: Soit $\overline{x}$ un point fixé. On évalue $f(\bar{x})$ à partir d'un grand nombre de données $(x_i\,,\,f_i)\,,\,i=0\ldots m$. En général, il est inutile de calculer le polynôme de Lagrange global de degré m. Les théorèmes B et C suggèrent que l'erreur $e(\bar{x})=f(\bar{x})-p_n(\bar{x})$ est du type

$$e(\bar{x})\simeq\prod_{j=0}^{n}(\bar{x}-x_j)\;f\left[x_0,x_1\ldots x_{n+1}\right] \tag{28}$$

On range les x_j de sorte que $|\bar{x}-x_j|$ soit une suite croissante. On évalue $p_n(\bar{x})$ quand n augmente. A partir d'un certain n l'adjonction des x_j additionnels ne sert plus à rien. On a intérêt à calculer d'une façon générale une suite de valeurs $p_k(x)$ avec k qui augmente et d'observer le comportement de cette suite.

Le calcul pratique de $p_k(x)$ est donné par

Théorème D

Si $p_k \in \mathcal{P}_k$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par

$$p_k(x_i) = f(x_i) \ , \ i = 0, 1 \dots k \tag{29}$$

alors le polynôme $p_{k+1} \in \mathcal{P}_{k+1}$ défini par les conditions

$$p_{k+1}(x_i) = f(x_i) \ , \ i = 0, 1 \dots k, k+1 \tag{30}$$

est le poynôme

$$p_{k+1}(x) = p_k(x) + \left\{ \prod_{j=0}^{k} (x - x_j) \right\} f[x_0, x_1 \dots x_{k+1}] \ , \ a \leq x \leq b \tag{31}$$

Démonstration:
Soit $q \in \mathcal{P}_{k+1}$ le polynôme qui interpole $(x_i \;\, f(x_i))$, $i = 0 \dots k+1$. On a

$$q(x_i) - p_{k+1}(x_i) = 0 \quad , \quad i = 0, 1 \dots k \tag{32}$$

De plus le coefficient de x^{k+1} dans $p_{k+1}(x)$ est le même que dans $q(x)$, donc $q - p_{k+1} \in \mathcal{P}_k$ et possède $k+1$ zéros, donc $q - p_{k+1} = 0$. ■

On en déduit par récurrence la formule d'évaluation de $p_n(x)$

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0\,,\, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ \ldots + \left[\prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j)\right] f[x_0\,,\, x_1 \ldots x_n]\,,\; a \leq x \leq b \end{aligned}$$

Le calcul effectif des $f[x_0, x_1 \ldots x_k]$ est donné par :

Théorème E

La différence divisée d'ordre $k+1$ $f[x_j\,,\, x_{j+1}\,, \ldots x_{j+k+1}]$ *est reliée aux différences divisées d'ordre* k $f[x_{j+1}, \ldots, x_{j+k+1}]$ *et*$f[x_j, \ldots, x_{j+k}]$ *par la formule*

$$f[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k+1}] = \frac{f[x_{j+1}, \ldots x_{j+k+1}] - f[x_j\,, \ldots x_{j+k}]}{x_{j+k+1} - x_j} \qquad (33)$$

Démonstration:
Soit p_k , $q_k \in \mathcal{P}_k$ des polynômes qui interpolent respectivement les valeurs $(x_i, f(x_i))$ $i = j, \dots, j+k$ et
$(x_i, f(x_i))$ $i = j+1, \dots, j+k+1$. Alors le polynôme p_{k+1} défini par

$$p_{k+1}(x) = \frac{(x - x_j)\, q_k(x) + (x_{j+k+1} - x)\, p_k(x)}{x_{j+k+1} - x_j} \;,\; a \leq x \leq b \qquad (34)$$

vérifie les deux conditions

$$\begin{cases} p_{k+1} \in \mathcal{P}_{k+1} \\ p_{k+1}(x_i) = f(x_i),\; i = j, \dots, j+k+1 \end{cases} \qquad (35)$$

donc le coefficient de x^{k+1} dans $p_{k+1}(x)$ est

$$\begin{aligned} f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] &= f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] \\ &= \frac{f[x_{j+1}, \dots x_{j+k+1}] - f\,[x_j, \dots x_{j+k}]}{x_{j+k+1} - x_j} \end{aligned}$$

car $f\,[x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}]$ est le coefficient de x^k dans q_k et
$f\,[x_j, \dots, x_{j+k}]$ est le coefficient de x^k dans p_k. ∎

Organisation du calcul des différences divisées de Newton

x	$f[x] = f(x)$			
x_0	$f[x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_2, x_2, x_3]$

Organisation du calcul des différences divisées de Newton

Exemple:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1.40	1.56	1.76	2.00	2.28

x	$f[x] = f(x)$				
0.1	1.40				
0.2	1.56	$\frac{1.56-1.40}{0.2-0.1} = 1.6$			
0.3	1.76	$\frac{1.76-1.56}{0.3-0.2} = 2.0$	$\frac{2.0-1.6}{0.3-0.1} = 2.0$		
0.4	2.00	$\frac{2.0-1.76}{0.4-0.3} = 2.4$	$\frac{2.4-2.}{0.4-0.2} = 2.0$	0.	
0.5	2.28	$\frac{2.28-2.0}{0.5-0.4} = 2.8$	$\frac{2.8-2.4}{0.5-0.3} = 2.0$	0.	0.

5- INTERPOLATION DE HERMITE

Données:

- les points $x_i, i = 0, \dots, m$
- $$\begin{cases} f(x_i), i = 0, 1 \dots, m \\ f^{(j)}(x_i), j = 0, 1 \dots, l_i \quad i = 0, 1 \dots, m \end{cases} \tag{36}$$

On a donc $l_i + 1$ informations en chaque point x_i, ce qui donne $n + 1$ coefficients inconnus avec

$$n + 1 = \sum_{i=0}^{m} (l_i + 1) \tag{37}$$

On cherche donc un polynôme interpolé $p(x) \in \mathcal{P}_n$.

Théorème F

Si les x_i sont des points distincts de $[a, b]$ et si $f^{(j)}(x_i), i = 0, 1 \dots, l_i \quad i = 0, 1 \dots, m$ sont des valeurs données, alors il existe un unique poynôme $p \in \mathcal{P}_n$ tel que

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), j = 0, 1 \dots, l_i \quad i = 0, 1 \dots, m \tag{38}$$

Démonstration:

On cherche $p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$. les conditions (38) forment un système linéaire en les c_i, qui est carré par définition de n. Il suffit donc de vérifier que la matrice est inversible, c-a-d que si le second membre dans (38) est nul, alors le vecteur $c = [c_0, c_1, \dots, c_n]^T = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}$ .Mais p est nécessairement un multiple de

$$\prod_{i=0}^{m} (x - x_i)^{l_i+1} \tag{39}$$

Puisque x^{n+1} intervient dans ce produit, on a $p \equiv 0$. ■

Extension de l'algorithme de Newton à l'interpolation de Hermite

Exemple:

x	1.6	1.7	1.8
$f(x)$	0.08	0.06	0.04
$f'(x)$	-0.25		-0.13

x	$f(x)$				
1.60	0.08				
1.60	0.08	-0.25			
1.70	0.06	$\frac{0.06-0.08}{1.70-1.60} = -0.2$	$\frac{-0.2+0.25}{1.70-1.60} = 0.5$		
1.80	0.04	$\frac{0.04-0.06}{0.3-0.2} = -0.2$	0.0	-2.5	
1.80	0.04	-0.13	$\frac{-0.13+0.2}{0.1} = 0.7$	3.5	$\frac{3.5+2.5}{0.2} = 30.0$

Calcul du polynôme de Hermite par différences divisées:

Théorème G

Soit $f(x)$ *une fonction donnée aux points* $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$ *avec répétition eventuelle. On suppose que si* x_i *intervient* $k+1$ *fois, alors les* $f^{(i)}(x_j),\ j = 1, 2, \ldots, k$ *sont aussi donnés. Supposons que le polynôme* $p(x)$ *soit calculé par la méthode de Newton généralisée de la façon précedente, alors* $p(x)$ *est le polynôme de Hermite correspondant aux données.*

Démonstration:

Soit $p^*(x)$ le polynôme de Hermite, défini de façon unique au théorème précédent. On montre que $p = p^*$. On a $f(x_i) = p^*(x_i)$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On fixe des ξ distincts tels que $|x_i - \xi| < \varepsilon, i = 0, 1, \dots, n$. (rappel: les x_i sont comptés avec répétition). On peut supposer que $f(x)$ est le polynôme de Lagrange aux points ξ_i. Dans le tableau de Newton pour le polynôme $f(x)$, on a $f[\xi_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_{j+k+1}]$. Mais ceci vaut $f^{(k+1)}(\xi)/(k+1)!$ par le théorème C, avec $\xi \in [\xi_j, \xi_{j+k+1}]$, ce qui entraîne $\xi \in [x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon]$. On constate donc que chaque terme du tableau pour f converge quand $\varepsilon \to 0$ vers le terme correspondant du tableau pour p. Comme le polynôme $f(x)$ est indépendant de ε, on en déduit que $f(x) \equiv p(x)$, par identité polynômiale. $\blacksquare$

Exercices

- Vérifier la formule donnant le polynôme de Lagrange dans le théorème A.
- Détailler le raisonnement par récurrence pour le théorème B.
- Montrer que les zéros de $T_{n+1}(x)$ sont les

$$x_i = \cos\left(\frac{(2(n-i)+1)\pi}{2(n+1)}\right)\ ;\ i = 0, 1, \ldots n \tag{40}$$

- Vérifier tous les détails de la preuve du théorème E.
- Vérifier tous les détails de la preuve du théorème G.